

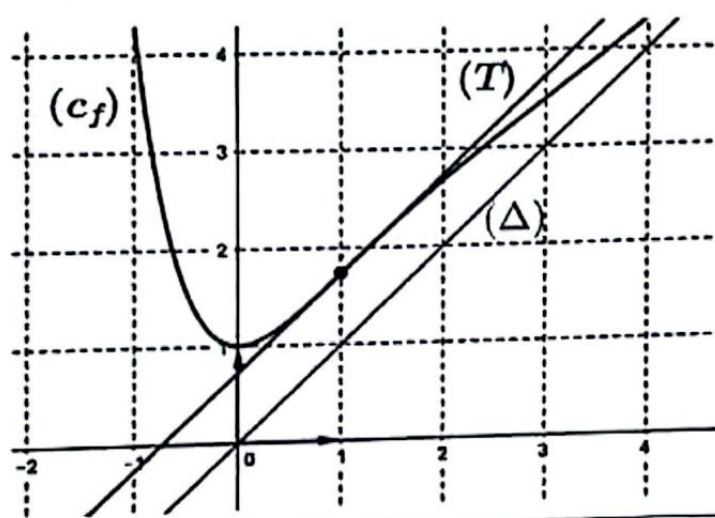
الإجابة النموذجية / مادة: الرياضيات / الشعبة: تقني رياضي / بكالوريا 2025

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)								
العلامة	مجزأة									
التمرين الأول (04 نقاط)										
2,25	0,5 0,25×3	(أ) عدد الحالات الممكنة: $C_{10}^3 = 120$ $P(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{60}$ ، $P(A) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{4}$ $P(C) = \frac{C_4^3 + C_3^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{5}$ (I)								
	0,5 0,5	(ب) $P(A \cap B) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{20}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{19}{60}$								
1,25	0,25 0,25×3 0,25	$X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$ <table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$P(X=x_i)$</td><td>$\frac{11}{120}$</td><td>$\frac{79}{120}$</td><td>$\frac{30}{120}$</td></tr></table> $E(X) = \frac{259}{120}$ (2)	x_i	1	2	3	$P(X=x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$
x_i	1	2	3							
$P(X=x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$							
0,5	0,5	احتمال ألا يبقى في الصندوق أية كرة خضراء: $\frac{3A_5^2 \times A_5^1}{A_{10}^3} = \frac{1}{15}$ (II)								
التمرين الثاني (04 نقاط)										
2	0,25×3	(أ) $u_2 = 2\sqrt{2c}$ ، $u_1 = 2c$ ، التخمين: (u_n) متناقصة تماما.								
	0,75	(ب) البرهان بالتراجع.								
	0,5	(ج) من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}(2 - \sqrt{u_n})$ ، (u_n) متناقصة تماما.								
1,5	0,5 0,25×2	(أ) من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ ، $v_n = \frac{2 - \ln 4}{2^n} = \frac{1 - \ln 2}{2^{n-1}}$ ، $v_0 = 2 - \ln 4$								
	0,25×2	(ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ ، $u_n = 4e^{v_n} = 4e^{\frac{1 - \ln 2}{2^{n-1}}}$								
0,5	0,25	(أ) $S_n = 4(1 - \ln 2)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$								
	0,25	(ب) $P_n = 4^{n+1} \times e^{S_n}$								
التمرين الثالث (05 نقاط)										
2,25	0,75	(أ) $x = 5k + 2$; $k \in \mathbb{Z}$ تكافئ $7x \equiv 9[5]$ (I)								

	0,5	$(x; y) = (5k+2; 7k+1) ; k \in \mathbb{Z}$	
	0,25	$d \in \{1; 3; 9\}$ (ب)	
	0,75	من أجل $d = 9$ نجد: $(x; y) = (45k+27; 63k+36) ; k \in \mathbb{Z}$	
1,75	1	(أ) من أجل كل عدد طبيعي k : $3^{6k+2} \equiv 2 [7] , 3^{6k+1} \equiv 3 [7] , 3^{6k} \equiv 1 [7]$ $3^{6k+5} \equiv 5 [7] , 3^{6k+4} \equiv 4 [7] , 3^{6k+3} \equiv 6 [7]$	(2)
	0,75	(ب) $n = 7k+5 ; k \in \mathbb{N}$ تكافئ $1446^{2025} + 5n + 2 \equiv 0 [7]$	
1	0,5	$k = 3\alpha + 3 ; \alpha \in \mathbb{N}$ تكافئ $3^{y-x} \equiv 5 [7]$	(3)
	0,5	ومنه: $(x; y) = (15\alpha + 17; 21\alpha + 22) ; \alpha \in \mathbb{N}$	

التمرين الرابع (07 نقاط)

	0,25x2	(أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ ، تبين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$																	
	0,5	(ب) من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = (x-1)(x-3)e^{-x}$																	
1,5	0,25	(ج) الدالة g متناقصة تماما على $[1; 3]$ ومتزايدة تماما على كل من $]-\infty; 1]$ و $[3; +\infty[$	(I)																
	0,25	جدول التغيرات:	(1)																
		<table> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$g'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr> <tr> <td>$g(x)$</td><td></td><td>1</td><td>$1-4e^{-3}$</td><td>1</td></tr> </table>	x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	$g'(x)$	+	0	-	0	+	$g(x)$		1	$1-4e^{-3}$	1	
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$															
$g'(x)$	+	0	-	0	+														
$g(x)$		1	$1-4e^{-3}$	1															
0,5	0,25x2	<table> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$g(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$g(x)$	-	0	+	(2)								
x	$-\infty$	0	$+\infty$																
$g(x)$	-	0	+																
	0,25x2	(أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$																	
0,75	0,25	(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) = 0$	(II)																
		أي: (Δ) ذو المعادلة: $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$	(1)																
	0,5	(أ) من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$																	
1	0,25	(ب) الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; 0]$ ومتزايدة تماما على $[0; +\infty[$	(2)																

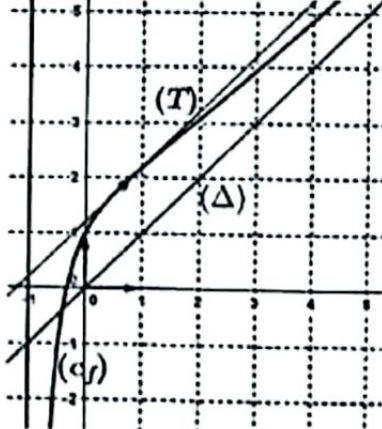
	0,25	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$	جدول التغيرات:	
x	$-\infty$	0	$+\infty$													
$f'(x)$	-	0	+													
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$													
	0,5+0,25	(T): $y = x + \frac{2}{e}$ ، $x=1$ تكافئ $f'(x)=1$ (أ)														
1,25	0,5	(ب) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f''(x) = g'(x)$ ومنه: للمنحني (C_f) نقطتا انعطاف هما: $B\left(3; 3 + \frac{10}{e^3}\right)$ ، $A\left(1; 1 + \frac{2}{e}\right)$														
1,25	0,25 0,25×2 0,5		$f(-1) = -1 + 2e$ رسم (Δ) ، (T) رسم (C_f)	(4)												
	0,25	من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = (x^2 - (a+2)x + a - b)e^{-x}$														
0,75	0,25	(أ) $(a; b) = (-2; -3)$														
	0,25	(ب) $\mathcal{A} = 4 \int_0^1 k(x) dx = 4(h(1) - h(0)) = \left(12 - \frac{24}{e}\right) \text{ cm}^2$														

ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحل الصحيحة مع التقيد بسلم التنقيط.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)										
العلامة	مجزأة											
التمرين الأول (04 نقاط)												
2	0,5	(أ) عدد الحالات الممكنة: $C_{12}^4 = 495$ $P(B) = \frac{C_8^4}{C_{12}^4} = \frac{14}{99} , P(A) = \frac{C_3^3 \times C_9^1 + C_4^3 \times C_8^1 + C_5^3 \times C_7^1}{C_{12}^4} = \frac{37}{165}$ $P(C) = 1 - P(B) = \frac{85}{99}$ (I)										
	0,25×3		(1) $P(A \cap B) = \frac{C_3^3 \times C_5^1 + C_5^3 \times C_3^1}{C_{12}^4} = \frac{7}{99}$ (ب) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{146}{495}$									
	0,5											
1,5	0,25 0,25×4 0,25	$x_i \in \{0; 1; 2; 3\}$ <table border="1"> <tr> <td>x_i</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>$P(X = x_i)$</td> <td>$\frac{14}{55}$</td> <td>$\frac{28}{55}$</td> <td>$\frac{12}{55}$</td> <td>$\frac{1}{55}$</td> </tr> </table> $E(X) = 1$ (2)	x_i	0	1	2	3	$P(X = x_i)$	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$
x_i	0	1	2	3								
$P(X = x_i)$	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$								
0,5	0,5	(II) احتمال ألا يبقى في الصندوق أية كرية خضراء: $\frac{4A_3^3 \times A_9^1}{A_{12}^4} = \frac{1}{55}$										
التمرين الثاني (04 نقاط)												
1,75	0,25	(أ) من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5 - \frac{12}{3 + u_n}$ (ب) البرهان بالتراجع. (ج) $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{3 + u_n} = \frac{(3 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$ (u_n) متزايدة تماما. (1)										
	0,5+0,25											
	0,5											
	0,25											
1,5	0,25+0,5	(أ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n = -3\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$ (ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ ، $u_n = -1 + \frac{6}{1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ أو $u_n = \frac{3 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ (2)										
	0,25+0,5											
0,75	0,25	(أ) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{4}{1 + u_n} = 1 - v_n$ (ب) $S_n = n + 1 + \frac{9}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = n + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (3)										
	0,5											

التمرين الثالث (05 نقاط)

1	0,5×2	$b=1687$ ، $a=1446$	(1)												
2,25	0,5	$PGCD(1446;1687)=241$ (أ)	(2)												
	1	(E) تكافئ $6x-7y=1$ ومنه: $k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x=7k+6 \\ y=6k+5 \end{cases}$													
	0,75	(ب) لدينا: $PPCM(x_0; y_0)=340$ ومنه: $(7k+6)(6k+5)=340$ أي: $42k^2+71k-310=0$ ومنه: $k=2$ ، $(x_0; y_0)=(20; 17)$													
0,75	0,75	لدينا: $\begin{cases} \alpha \equiv 5[6] \\ \alpha \equiv 6[7] \end{cases}$ أي: $\begin{cases} \alpha=6\beta+5 \\ \alpha=7\gamma+6 \end{cases}$ أي: $6\beta-7\gamma=1$ ومنه: $k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} \beta=7k+6 \\ \gamma=6k+5 \end{cases}$ وعليه: $\alpha=42k+41$ مع $k \in \mathbb{Z}$	(3)												
1	0,5 0,5	$B=(n+1)(6n+5)$ و $A=(n+1)(7n+6)$ ومنه: $PGCD(A; B)=(n+1) \times PGCD(7n+6; 6n+5)=n+1$	(4)												
التمرين الرابع (07 نقاط)															
1	0,25	(أ) من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2x(x+2)}{x+1}$	(I) (1)												
	0,25	إشارة $g'(x)$													
	0,25	الدالة g متناقصة تماما على $]-1; 0]$ ومتزايدة تماما على كل من $[0; +\infty[$													
	0,25	جدول التغيرات:													
		<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">-1</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">+∞</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$g'(x)$</td> <td style="padding: 2px 10px;">-</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$g(x)$</td> <td colspan="3" style="text-align: center; padding: 2px 10px;"> </td> </tr> </table>	x	-1	0	+∞	$g'(x)$	-	0	+	$g(x)$				
x	-1	0	+∞												
$g'(x)$	-	0	+												
$g(x)$															
0,25	0,25	من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$	(2)												
1,5	0,25×2	(أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$	(II) (1)												
	0,5	(ب) من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$													
	0,25	(ج) الدالة f متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$													
	0,25	جدول التغيرات:													
		<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">-1</td> <td style="padding: 2px 10px;">+∞</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$f'(x)$</td> <td colspan="2" style="text-align: center; padding: 2px 10px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$f(x)$</td> <td colspan="2" style="text-align: center; padding: 2px 10px;"> </td> </tr> </table>	x	-1	+∞	$f'(x)$	+		$f(x)$						
x	-1	+∞													
$f'(x)$	+														
$f(x)$															
1,25	0,5	(أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ أي: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$	(2)												
	0,5+0,25	(ب) $f'(x)=1$ تكافئ $x=\sqrt{e}-1$ ، $(T): y=x+\frac{2}{\sqrt{e}}$													

0,75	0,25	(أ) من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f''(x) = \frac{4 \ln(x+1) - 4}{(x+1)^3}$	(3)
	$0,25 \times 2$	(ب) f'' تنعدم وتغير إشارتها عند $e-1$ و $B(e-1; e-1+\frac{3}{e})$ نقطة انعطاف	
1,75	0,25 $0,25 \times 2$ 0,5	(أ) $f(0)=1$ رسم (Δ) ، (T) رسم (C_f) 	(4)
	0,5	(ب) $f(x) = x + m$ تكافئ $1 + 2 \ln(x+1) = m(x+1)$ $m \leq 0$ أو $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$: يوجد حل واحد ، $0 < m < \frac{2}{\sqrt{e}}$: يوجد حلان مختلفان ، $m > \frac{2}{\sqrt{e}}$: لا يوجد حلول.	
0,5	0,5	$\mathcal{A} = \int_0^{e-1} \frac{1+2\ln(x+1)}{x+1} dx = \int_0^{e-1} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1} \right) dx = 2u.a$	(5)

ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحل الصحيحة مع التقيد بسلم التنقيط.

